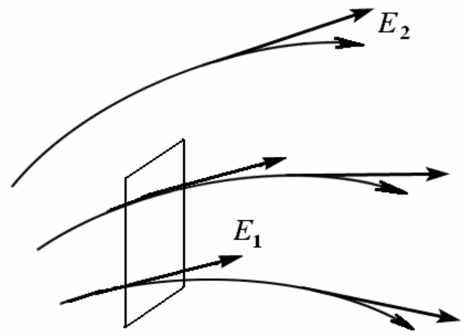
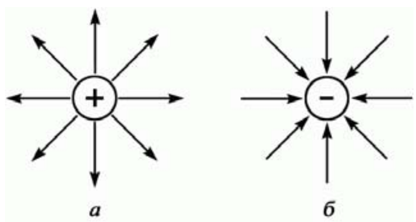
Лекция № 2
Графическое изображение электрического поля. Силовые линии напряженности электрического поля

Для графического изображения электрических полей используют силовые линии.
Силовые линии напряженности электрического поля – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором ***E***, т.е. по их **направлению** можно судить, где расположены положительные (+) и отрицательные (–) заряды, создающие электрическое поле.

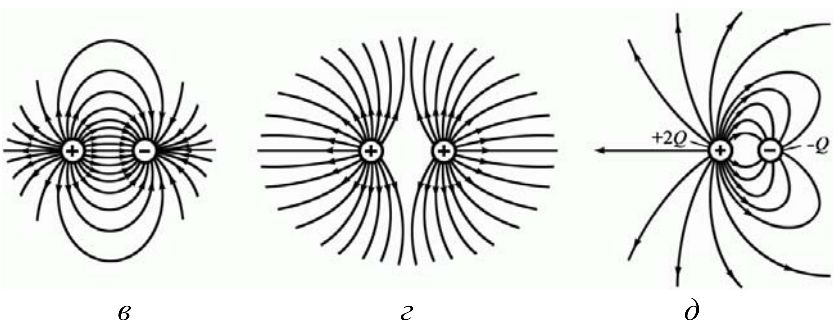


● Для однородного электрического поля (поля, во всех точках которого $\vec{E} = const$) линии напряженности электрического поля параллельны вектору ***E*** $(\| \vec{E})$.
Пример: плоский конденсатор.

● Для точечных зарядов линии напряженности электрического поля направлены радиально.



- Силовые линии напряженности электрического поля не замкнуты, имеют начало и конец. →
Можно говорить, что электрическое поле имеет «источники» и «стоки» силовых линий.
- Силовые линии начинаются на положительных (+) зарядах (Рис. *а*), заканчиваются на отрицательных (–) зарядах (Рис. *б*).
- Силовые линии не пересекаются. В противном случае поле в точке пересечения оказывается неоднозначным: исключение – точка, в которой $\vec{E} = 0$.



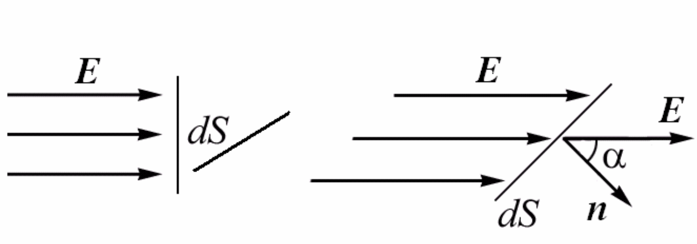
Диаграммы силовых линий:

в – два заряда противоположного знака (диполь); *г* – два заряда одного знака;

д – два заряда, один из которых $-Q$, а другой $+2Q$

● Силовые линии проводят так, чтобы число линий N напряженности электрического поля, пронизывающих единичную площадку $dS \perp \vec{E}$, $N = \left|\vec{E}\right|$,

$\angle \vec{n}\vec{E} = 0$, где $\vec{n}$ - вектор положительной нормали к dS.



● Если единичная площадка dS не перпендикулярна вектору $\boldsymbol{E}$, то её нормаль $\vec{n}$ образует угол α с $\vec{E}$ ($\angle \vec{n}\vec{E} = \alpha$) → число линий, пронизывающих dS равно

$$N = EdS \cdot \cos\alpha = E_n dS, \text{ где } E_n = E\cos\alpha.$$

Поэтому по густоте силовых линий можно судить о величине напряженности электростатического поля в данном месте.

Поток вектора напряженности электрического поля

● Произвольная площадка dS.

Поток вектора напряженности электрического поля через площадку dS:

$$d\Phi_E = E_n dS = \vec{E}d\vec{S} \qquad [В \cdot м],$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор (**псевдовектор**), модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{n}$ к площадке dS.

$E = const$ → $d\Phi_E = dN$ - числу линий вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, пронизывающих площадку dS.

● Произвольная замкнутая поверхность S.

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_S E_n dS.$$

Для замкнутой поверхности за положительное направление вектора $\boldsymbol{n}$ принимается внешняя нормаль, т.е. направленная наружу от объема, охватываемого поверхностью S.

Если поверхность не плоская, а поле неоднородное, то выделяют малый элемент dS, который можно считать плоским, а поле в его пределах – однородным. Поток вектора напряженности электрического поля в этом случае:

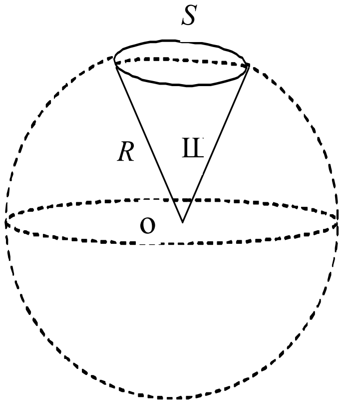
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S}.$$

Знак потока совпадает со знаком заряда.

Закон (теорема) Гаусса для вектора $\vec{E}$ в интегральной форме.

Телесный угол – часть пространства, ограниченная конической поверхностью.

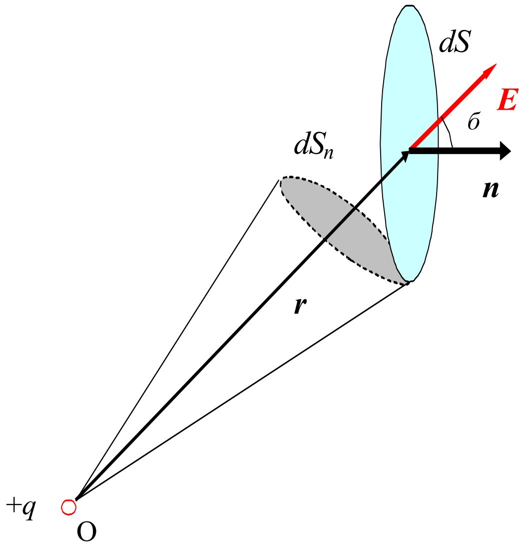
Мера телесного угла – отношение площади S сферы, вырезаемой на поверхности сферы конической поверхностью, к квадрату радиуса R сферы.



$$\Omega = \frac{S}{R^2} \qquad [\text{стерадиан}].$$

1 стерадиан – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу этой сферы.

● Электрическое поле создается точечным зарядом $+q$ в вакууме.



Поток $d\Phi_E$ напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом, через бесконечно малую площадку dS, радиус - вектор которой $\boldsymbol{r}$.

dS_n – проекция площадки dS на плоскость перпендикулярную вектору $\boldsymbol{r}$ ($\perp \vec{r}$).

$\boldsymbol{n}$ – единичный вектор положительной нормали к площадке dS.

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}. \tag{1}$$

Начало отсчета совмещаем с точечным зарядом $+q$.

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. & (2) \\ d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}. & (3) \\ & (1) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$d\Phi_E = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{qrdS}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos(\angle\vec{r}, d\vec{S}) = \frac{qdS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{4}$$

$$dS \cdot \cos(\angle\vec{r}, d\vec{S}) = dS \cdot \cos\alpha = dS_n. \tag{5}$$

Поток $d\Phi_E$ напряженности электрического поля через площадку dS и dS_n один и тот же, что естественно.

Площадка dS_n совпадает с элементом шаровой поверхности радиуса R с центром в точке О. Если угол α мал, то можно принять, что $R \approx r$. $\rightarrow$

На площадку dS_n опирается телесный угол $d\Omega = \dfrac{dS_n}{r^2}$. $\rightarrow$

$$dS_n = r^2 \cdot d\Omega. \qquad (6) \qquad\qquad d\Phi_E = \frac{q dS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q r^2 d\Omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega. \qquad (7)$$

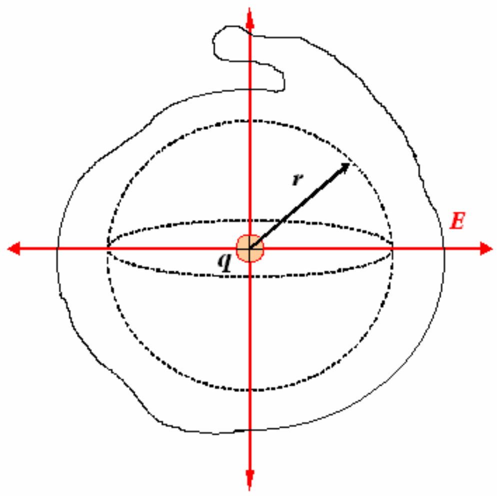
Для конической поверхности: $$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int_0^{\Omega} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega = \frac{q\Omega}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (8)$$

Для замкнутой поверхности: $$\Phi_E = \oint_S E dS_n = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dS_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Или из уравнения (8): $$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (9)$$

● **Точечный заряд** $+q$ охвачен сферической поверхностью.

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$



● Этот результат справедлив для замкнутой **поверхности любой формы**, так как каждая линия вектора ***E***, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

● Если произвольная поверхность окружает n точечных зарядов, то согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n,$$

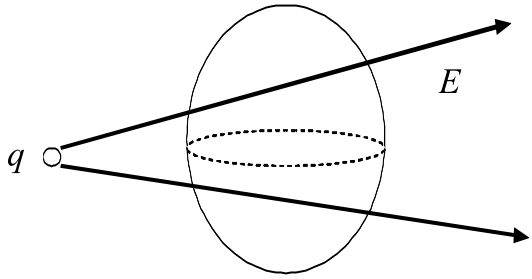
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_i^{\kappa} E_{ni}\right) \cdot dS = \sum_i^{\kappa} \oint_S E_{ni} dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}. \qquad\qquad \Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}.$$

● Если поверхность охватывает каким-то образом распределенный заряд с объемной плотностью ρ ($\rho = dq/dV$, Кл/м^3), то суммарный заряд, заключенный в объеме V, охватываемым поверхностью S:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

● Если поверхность не охватывает какой-либо заряд, то число силовых линий, входящих в поверхность, равно числу силовых линий выходящих из неё. →
Суммарный поток Φ_E заряда через замкнутую поверхность в этом случае равен нулю.

$$\Phi_E = 0.$$



Теорема Гаусса: для электрического поля в вакууме поток вектора напряженности электростатического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленных на ε_0.
Заметим: с физической точки зрения закон Гаусса можно рассматривать как закон сохранения потока в том смысле, что поток не зависит от поверхности, а также и от времени при условии, что заряды не пересекают поверхность.

Методика применения теоремы Гаусса для расчета электрических полей – второй способ определения напряженности электрического поля *E*

Теорема Гаусса применяется для нахождения полей, созданных телами, обладающими геометрической симметрией. Тогда векторное уравнение сводится к скалярному.

1) Находится поток Φ_E вектора ***E*** по определению потока.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} .$$

2) Находится поток Φ_E по теореме Гаусса.

$$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} .$$

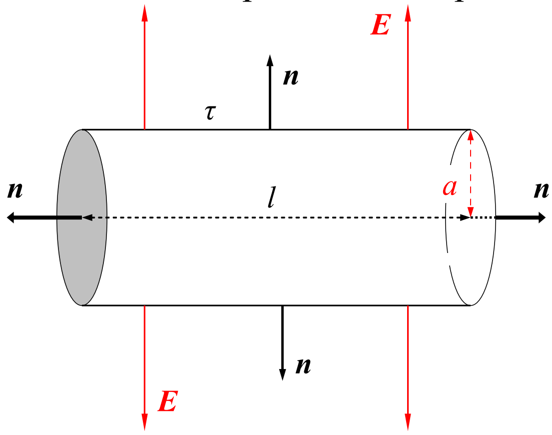
3) Из условия равенства потоков находится вектор ***E***.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} .$$

Поэтому закон Гаусса используется, когда нахождение $\vec{E}$ сводится к решению скалярного уравнения, а это возможно, если тело и, следовательно, электрическое поле, созданное им, обладает геометрической симметрией.

Примеры применения теоремы Гаусса

1. *Поле бесконечной равномерно заряженной нити* (цилиндра) с линейной плотностью τ ($\tau = dq/dl$, Кл/м).
Охватим нить вспомогательной цилиндрической поверхностью S.



Поле симметричное, направлено перпендикулярно нити и из соображений симметрии на одинаковом расстоянии от оси симметрии цилиндра (нити) имеет одинаковое значение.

Поток вектора **E**: $$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 2\int_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S}\,. \qquad (1)$$

• Основание цилиндра: $\angle\vec{E},\vec{n} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{Eосн} = 2\int_{S_{осн}} EdS\cos(\angle\vec{E},\vec{n}) = 0\,. \qquad (2)$

• Боковая поверхность: $\angle\vec{E},\vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\angle\vec{E},\vec{n}) = 1\,.$

В соответствии с методикой применения теоремы Гаусса.

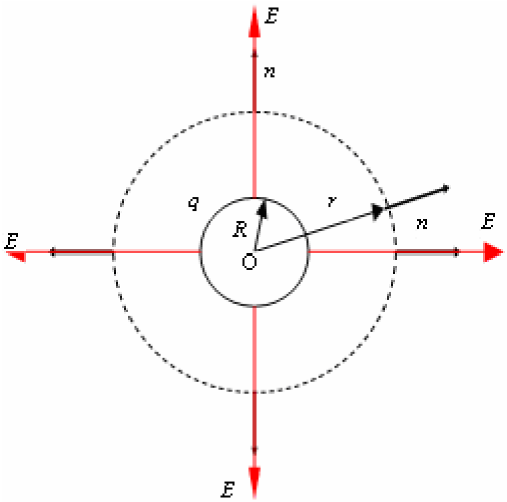
1) $$\Phi_E = \Phi_{E\,осн} + \Phi_{Eбок} = 0 + \int_{S_{бок}} EdS\cos(\angle\vec{E},\vec{n}) = \int_{S_{бок}} EdS = E\int_{S_{бок}} dS = E2\pi al\,. \qquad (3)$$

2) $$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\int_l \tau\cdot dl}{\varepsilon_0} = \frac{\tau\cdot l}{\varepsilon_0}\,. \qquad (4)$$

3) Правые и левые части уравнений (3) и (4) равны друг другу. Тогда с учетом (2), имеем

$$E2\pi al = \frac{\tau\cdot l}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

2. *Поле равномерно заряженной сферы* радиуса R.



Охватим заряженную $(+q)$ сферу вспомогательной сферической поверхностью радиуса r.

$r \geq R$.

Поле симметричное, линии напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля направлены в радиальном направлении, и на одинаковом расстоянии от точки О напряженность поля имеет одно и то же значение.

Вектор единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к сфере радиуса r совпадает по направлению с вектором напряженности $\boldsymbol{E}$.

В соответствии с методикой применения теоремы Гаусса.

$$1)\ \Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{бок}} EdS \cos(\angle \vec{E}, d\vec{S}) = E \int_S dS = E 4\pi r^2. \quad (1)$$

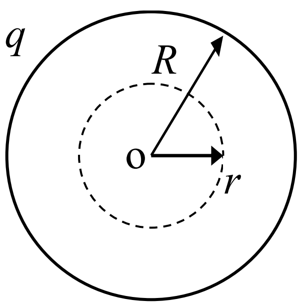
$$2)\ \Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (2)$$

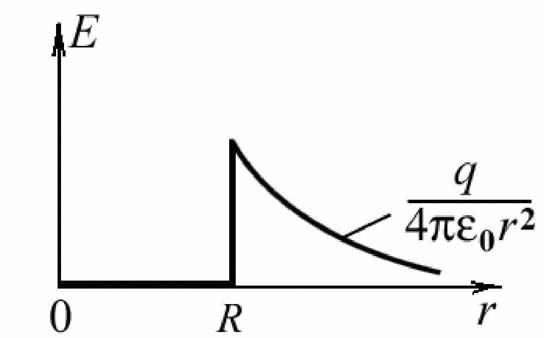
3) Левые и правые части уравнений (1) и (2) равны друг другу

$$\Phi_E = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (3)$$

При $r \geq R$ поле сферы находится по уравнению (3) как поле точечного заряда.

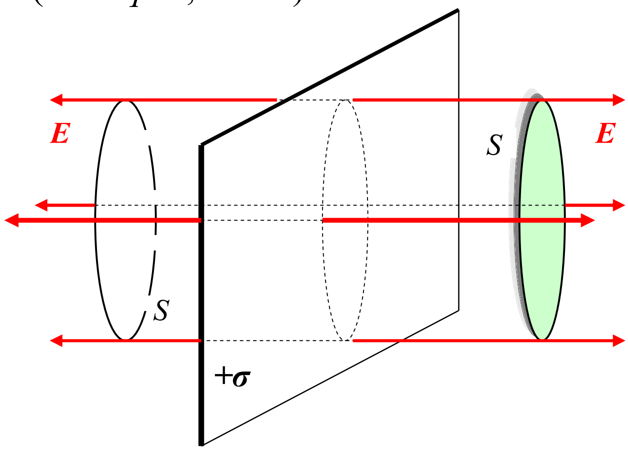
При $r < R$: $\left.\begin{array}{l} \Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = E 4\pi r^2. \\ \Phi_E = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = 0. \end{array}\right\}$ $E = 0$ – поле внутри сферы.





Напряженность электрического поля, создаваемая сферой радиусом R

3. *Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости* с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ ($\sigma = dq/dS$, Кл/м^2).



В качестве замкнутой поверхности возьмем цилиндр, основания которого параллельны плоскости, и который делится заряженной плоскостью на две равные половины.

Поле симметричное, вектор **E** перпендикулярен ($\vec{E}\perp$) плоскости с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и на одинаковом расстоянии от плоскости имеет одинаковое значение.

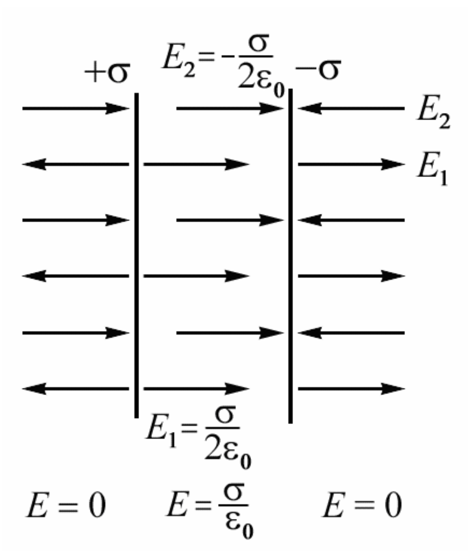
1) $$\varPhi_E = \varPhi_{E\,осн} + \varPhi_{Eбок} = 2\int\limits_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S} = 2ES_{осн} + 0(\Leftarrow \vec{E}\perp d\vec{S}) = 2ES\,. \qquad (1)$$

2) $$\varPhi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

3) Левые и правые части уравнений (1) и (2) равны друг другу

$$\rightarrow \qquad 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

4. *Поле двух равномерно заряженных бесконечных плоскостей* с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$.



Согласно принципу суперпозиции, результирующее поле равно:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\,.$$

• В пространстве вне плоскостей получаем:

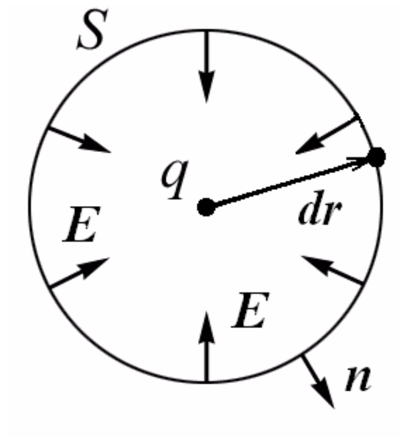
$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0\,.$$

• В пространстве между плоскостями поле равно:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Теорема Ирншоу

Система неподвижных электрических зарядов не может находиться в устойчивом равновесии.



Имеется система зарядов $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Один из зарядов q системы охватим замкнутой поверхностью S.

$\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S.

Заряд $+q$ будет находиться в равновесии, если при его перемещении на расстояние $\boldsymbol{dr}$ со стороны всех остальных зарядов системы, расположенных вне поверхности S, будет действовать сила $\boldsymbol{F}$, возвращающая его в исходное положение.

Сила $\boldsymbol{F}$ обусловлена электрическим полем напряженностью $\boldsymbol{E}$, созданным всеми остальными зарядами. Поле всех внешних зарядов $\boldsymbol{E}$ должно быть направлено противоположно направлению вектора перемещения $\boldsymbol{dr}$, то есть от поверхности S к центру. Следовательно, угол $\angle\vec{E},\vec{n} = \angle\vec{E},d\vec{S} = 180^0$.

Поток вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ через поверхность S отрицательный:

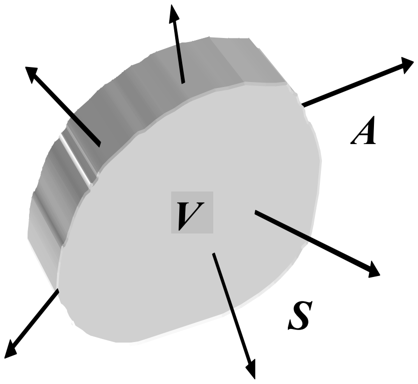
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{бок}} EdS\cos(\angle\vec{E},d\vec{S}) = \int_S EdS\cos 180^0 < 0. \qquad (1)$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса, если заряды не охватываются замкнутой поверхностью, то поток вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля, создаваемого ими, через эту поверхность $\Phi_E = 0$.

Следовательно, условие (1) не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему Ирншоу.

Поэтому общепринята модель атома Резерфорда – планетарная модель атома, в которой электроны движутся вокруг ядра по окружностям.

Закон Гаусса в дифференциальной форме



Рассмотрим силовое поле вектора ***A***.

V – объем, ограниченный поверхностью *S*.

N – число силовых линий, пронизывающих поверхность *S* (поток).

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{dN}{dV} = div\vec{A}\,. \qquad (1)$$

Дивергенция вектора – число силовых линий, приходящихся на единицу объема, или плотность потока силовых линий.

Пример: из объема вытекает и втекает вода.
$\Phi > 0 \rightarrow$ вытекает больше, чем втекает.
$\Phi < 0 \rightarrow$ вытекает меньше, чем втекает.

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V div\vec{A} dV\,. \qquad (2)$$

По закону Гаусса для вектора ***E***:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}, \qquad (3)$$

где ρ – объемная плотность заряда, Кл/м^3.

Теорема Остроградского-Гаусса для вектора ***E***:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V div\vec{E} dV = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

Тогда $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ – ***закон Гаусса в дифференциальной форме***. (5)

$$div\vec{A} = \frac{dA}{dV} = \frac{dA}{dxdydz} \quad \Rightarrow \quad div\vec{E} = \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,. \qquad (6)$$