Лекция № 16

Уравнения Максвелла.
Электромагнитная теория Максвелла (60-е годы 19 века)

Это последовательная теория единого электромагнитного поля, создаваемого произвольной системой зарядов и токов.
В ней решается *основная задача электродинамики*: по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются основные характеристики создаваемых ими электрических и магнитных полей.

Это *феноменологическая теория*, т.е. она не рассматривает механизмы явлений, происходящих в среде и вызывающих появление полей.

Электрические и магнитные свойства среды характеризуются:
ε – относительной диэлектрической проницаемостью,
μ – относительной магнитной проницаемостью,
σ – удельной электрической проводимостью.

В теории Максвелла рассматриваются ***макроскопические поля***, которые
- создаются макроскопическими зарядами и токами, сосредоточенными в объемах много больших, чем объем атомов и молекул,
- расстояние от источников полей до рассматриваемой точки пространства много больше размеров атомов и молекул,
- период изменения переменных электрических и магнитных полей много больше периода внутримолекулярных процессов.

Макроскопические заряды и токи являются совокупностью *микроскопических зарядов и токов*, которые создают свои ***микрополя***, непрерывно изменяющиеся во времени в каждой точке пространства.

Макроскопические поля являются усредненными микрополями
• по интервалам времени много большим, чем периоды внутриатомных процессов и
• по объемам много большим, чем объем атомов и молекул.

Теория Максвелла – теория *близкодействия*, т.е. электромагнитное взаимодействие происходит с конечной скоростью, равной скорости света c.
Вся совокупность законов электромагнетизма может быть представлена в виде системы уравнений, известной как система уравнений Максвелла.

Основные положения теории Максвелла

1,Переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле.

2. Переменное электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Вихревое электрическое поле

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \qquad (1)$$

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру L взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность натянутую на контур.

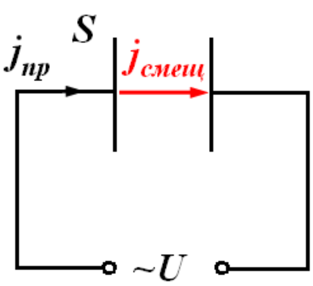
Фарадей обнаружил, что переменное магнитное сквозь замкнутый проводящий контур, приводит к возникновению в нем индукционного тока.
Максвелл предположил, что уравнение (1) справедливо не только для проводящего контура, но и для любого замкнутого контура в пространстве. Следовательно, контур служит индикатором вихревого электрического поля, которое существует независимо от того находится в этом поле проводящий контур или нет.:

2. Ток смещения. Закон полного тока:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{макро} + I_{микро} \right), \qquad (2)$$

где $I_{макро}$ – результирующий макроток (проводимости и конвекционный),
$I_{микро}$ – микроток сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L.

Электрический ток порождает магнитное поле.



Максвелл предположил, что переменное электрическое поле подобно электрическому току порождает магнитное поле, и ввел понятие ***ток смещения***.

Постулируется: линии тока проводимости на границах обкладок конденсатора переходят в линии тока смещения.

$$j_{пр} = j_{см}. \qquad (1)$$

$$j_{пр} = \frac{I}{S}. \qquad (2)$$

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) показывает, как увеличивается заряд q на обкладках конденсатора C. Заряд на обкладках конденсатора $q = \sigma S$. (4)

Следовательно, ток в цепи $I = S\dfrac{d\sigma}{dt}$. (5)

С учетом уравнений (1), (2) получаем: $j_{см} = \dfrac{I}{S} = \dfrac{d\sigma}{dt}$. (6)

Поле между обкладок конденсатора $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, (7)

$D = \varepsilon_0 E = \sigma$. (8)

$$j_{см} = \frac{dD}{dt}. \quad (9)$$

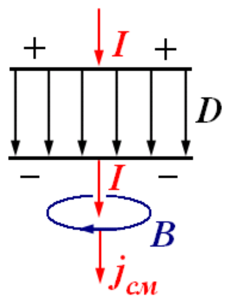
$$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (10)$$

Вектор электрического смещения $\vec{D} = \vec{D}(S,t)$.

Если обкладки неподвижны и не деформируются, то от полной производной в уравнении (10) можно перейти к частной производной по времени:

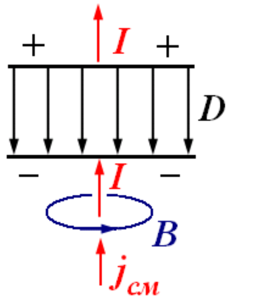
$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (11)$$

зарядка



• Конденсатор заряжается.
Электрическое поле возрастает,
вектор ***D*** увеличивается, $\vec{j}_{см} \uparrow\uparrow \vec{D}$.

разрядка



• Конденсатор разряжается.
Электрическое поле убывает,
вектор ***D*** уменьшается, $\vec{j}_{см} \uparrow\downarrow \vec{D}$.

$$I_{смещ} = \int_S \vec{j}_{смещ} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}.$$

$$j_{полн} = j_{пр} + j_{см} = j + \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (12) \qquad \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

*Циркуляция вектора **H** напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме макротоков и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.*

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad \Rightarrow$$

В диэлектрике: $$j_{см} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}_{\substack{пл.тока\\ смещ.в\\ вакууме}} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\substack{пл.тока\\ поляризации}} .$$

Максвелл приписал току смещения только одно общее свойство с током проводимости – *способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле*.

Из приведенного выражения можно понять происхождение термина «ток смещения». В среде часть этого тока действительно связана со смещением связанных зарядов $(\frac{\partial P}{\partial t})$. Токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости и также возбуждают магнитное поле. Принциптальная идея Максвелла состоит в том, что другая « истинная» часть тока смещения$(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$, которая не связана ни с каким движением зарядов, а обусловлена только изменением электрического поля , также возбуждает магнитное поле, что имеет место даже в вакууме.

Ток поляризации связан с потерей энергии на нагревание диэлектрика при его поляризации. Ток смещения в вакууме не приводит к выделению тепла.

Система уравнений Максвелла
в интегральной форме

1. $$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

2. $$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

3. $$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

4. $$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

1. Циркуляция вектора напряженности ***E*** вихревого электрического поля по любому замкнутому контуру равна скорости изменения магнитного потока через площадь контура, взятую с обратным знаком.
Отражает:
- первое положение теории Максвелла,
- закон электромагнитной индукции.

2. Поток вектора индукции ***B*** магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.
Следовательно, силовые линии магнитного поля замкнуты.

3. Циркуляция вектора напряженности ***H*** магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур.
Закон полного тока.
Физический смысл: магнитное поле порождается током проводимости и переменным электрическим полем.

4. Поток вектора электрической индукции ***D*** через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.
Теорема Гаусса для вектора **D**.
Физический смысл: электрическое поле создается нескомпенсированными электрическими зарядами.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Переход от уравнений Максвелла в интегральной форме к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме осуществляется на основании

теоремы Остроградского-Гаусса: $\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\vec{A}dV,$

теоремы Стокса: $\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S}.$

$$1.\ rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$2.\ div\vec{B} = 0.$$

$$3.\ rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$4.\ div\vec{D} = \rho.$$

Из уравнений Максвелла следует.

1) Электрическое и магнитное поля взаимосвязаны, т.е. в общем случае электрическое и магнитное поля не могут существовать независимо друг от друга. Следовательно, существует единое *электромагнитное поле*.

2) Уравнения Максвелла являются инвариантными относительно преобразований Лоренца, т.е. их вид не меняется при переходе от одной ИСО к другой.

3) В общем случае уравнения Максвелла не симметричны.

$$rot\vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\text{одно слагаемое}}; \quad rot\vec{H} = \underbrace{\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{два слагаемых}}.$$

Уравнения Максвелла содержат плотность электрического заряда и тока. В тоже время магнитные заряды и соответствующие им магнитные токи отсутствуют, хотя теоретического запрета на существование свободных магнитных зарядов (магнитных монополей-Дирак-1931 г.) нет. В настоящее время не обнаружены. Но если среда не содержит свободных электрических зарядов ($\rho = 0$) и в ней нет тока проводимости ($j = 0$), следовательно, получаем систему уравнений

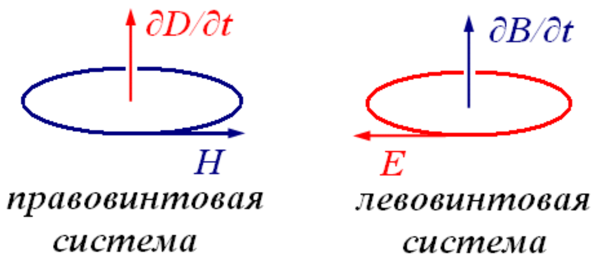
$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$div\vec{B} = 0; \qquad div\vec{D} = 0. \qquad (1)$$

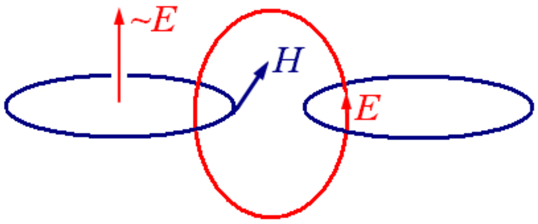
Уравнения становятся симметричными, и в системе (1) они отличаются только знаками.

Различие в знаках правых частей уравнений Максвелла соответствует закону сохранения энергии и правилу Ленца, что является необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля.

Если бы знаки при $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ и $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ были бы одинаковы, то бесконечно малое увеличение одного из полей привело бы к неограниченному возрастанию обоих полей, и наоборот.



4) Возникновение электромагнитной волны.



Материальные уравнения Максвелла

Система уравнений Максвелла
- согласуется с уравнениями движения заряженной частицы под действием полной силы Лоренца,
- не учитывает квантовые эффекты.

Для расчета полей в среде система уравнений Максвелла дополняется уравнениями, которые характеризуют электрические и магнитные свойства среды – *материальные уравнения Максвелла*:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{кул} + \vec{E}_{ст}\right).$$

В общем случае связь между векторами ***D*** и ***E***, ***B*** и ***H*** не линейная.

Система статических уравнений Максвелла

В случае, когда вектора ***D*** и ***B*** не зависят от времени, т.е. ***D*** и ***B*** = *const*, система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0, \qquad rot\vec{E} = 0.$$
$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0, \qquad div\vec{B} = 0.$$
$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{S}, \qquad rot\vec{H} = \vec{j}.$$
$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV, \qquad div\vec{D} = \rho.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля можно рассматривать независимо друг от друга.

Значение теории Максвелла

1. Показал, что электромагнитное поле – это совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей.

2. Предсказал существование электромагнитных волн, распространяющихся от точки к точке с конечной скоростью.

3. Показал, что световые волны являются электромагнитными волнами.

4. Связал воедино электричество, магнетизм и оптику.