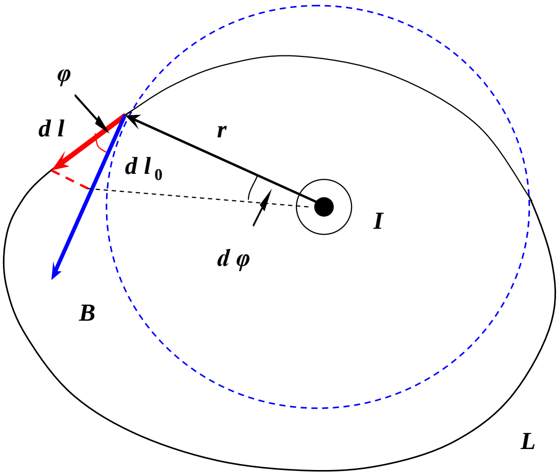
Лекция № 11
Закон полного тока

Аналог закона Гаусса в электростатике, так как с его помощью можно рассчитать магнитное поле тел, обладающих геометрической симметрией.

Закон полного тока в интегральной форме

Пусть имеем бесконечно длинный проводник с током I.



L – замкнутый контур произвольной формы.

Вектор магнитной индукции $\vec{B} \perp \vec{r}$ – радиус- вектору.

dl – элемент произвольного контура L.

dl_0 – элемент силовой линии прямого бесконечного тока (окружности).

φ – угол между dl и dl_0 или $\varphi = \angle \vec{B}, d\vec{l}$.

$dl_0 = dl\cos\varphi$ - проекция dl на B.

Циркуляция вектора ***B*** по замкнутому контуру L:

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Bdl\cos\varphi = \oint_L Bdl_0. \\
&B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \\
&dl_0 = rd\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S}. \quad \Rightarrow$$

1. Магнитное поле прямолинейного тока – вихревое, т.к. $\oint_L \vec{B}d\vec{l} \neq 0$.

(Электрическое поле – потенциальное, $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$ *.)*

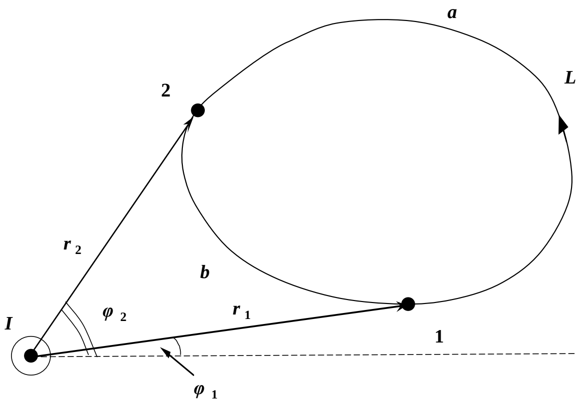
Следовательно, магнитное поле не является потенциальным.

2. Циркуляция вектора ***B*** прямолинейного тока одинакова вдоль всех линий магнитной индукции и равна произведению $\mu_0 I$.

Если магнитное поле создано системой токов, то по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i, \qquad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i.$$

● Ток не пронизывает контур.



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_{1a2} \vec{B} d\vec{l} + \oint_{2b1} \vec{B} d\vec{l} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

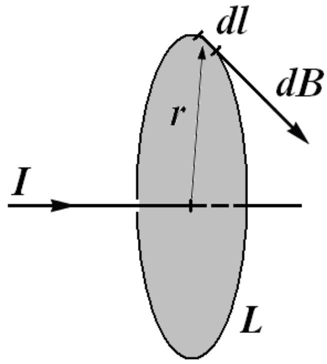
Циркуляция вектора ***B*** прямолинейного тока вдоль замкнутого контура, не охватывающего этот проводник, равна нулю.

Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур.

Применение закона полного тока для вычисления простейших полей

Закон полного тока, как и закон Гаусса, применим для расчета полей проводников, обладающих геометрической симметрией.

● Поле бесконечного прямого тока.

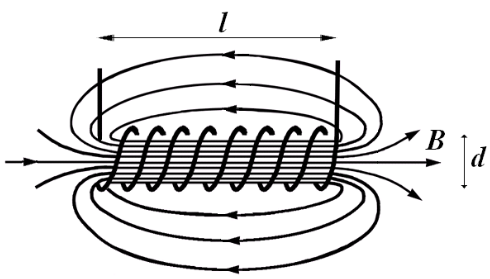


В качестве контура выберем окружность радиуса r перпендикулярную току и имеющую центр на оси тока.
В этом случае контур совпадает с силовой линией вектора магнитной индукции **B** и из соображений симметрии во всех точках, лежащих на одинаковом расстоянии от проводника, модуль вектора ***B*** одинаков.
Закон полного тока: $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I.$

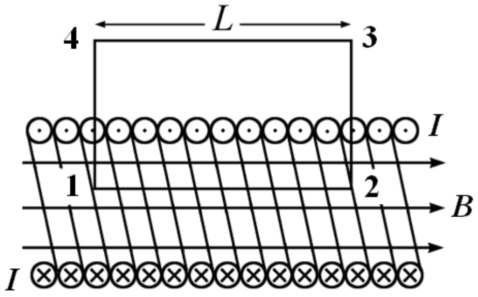
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos\left(\angle \vec{B}, d\vec{l}\right) = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I.$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

● Магнитное поле длинного соленоида.
l – длина соленоида.
N – число витков.



$l >> d$; в этом случае эксперимент показывает, что $B_{внутри} = const$, а вне соленоида поле мало.
Поэтому считаем, что магнитное поле сосредоточено внутри соленоида, а полем вне соленоида пренебрегаем $B_{вне\ соленоида} = 0$.



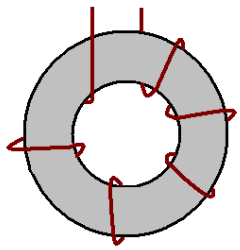
Возьмем замкнутый прямоугольный контур 1-2-3-4.

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{\vec{B}\uparrow\uparrow d\vec{l}} + \int_2^3 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{\vec{B}\perp d\vec{l}} + \int_3^4 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{B=0} + \int_4^1 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{\vec{B}\perp d\vec{l}} = BL.\\ &\text{Закон полного тока:} \quad \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 N_L I.\end{aligned}\right\}$$

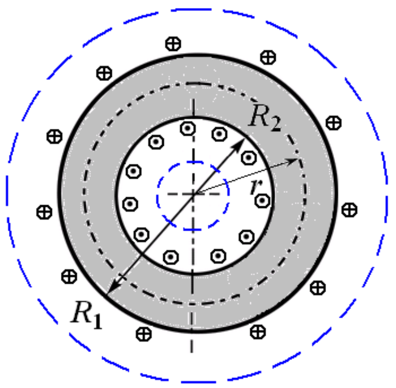
$$BL = \mu_0 N_L I. \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N_L I}{L} = \mu_0 n I,$$

n – число витков соленоида на единицу длины.

● Магнитное поле тороида.



Тороид – кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора.



N – число витков тора,
R_1 – внешний радиус тора,
R_2 – внутренний радиус тора,
r – радиус произвольной окружности.

Так как поле тороида радиально симметрично, то на одинаковом расстоянии от его оси модуль вектора магнитной индукции $B = const$.

• $r < R_2$: $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Bdl\cos\left(\angle\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I = 0$, т.к. окружность радиуса r не охватывает токи ($I = 0$).
$B = 0$, поле внутри тороида равно нулю.

• $r > R_1$: $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i = \mu_0 \left(N \cdot I - N \cdot I\right) = 0$, $B = 0$, поле вне тороида равно нулю.

• $R_2 < r < R_1$: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = B\oint\limits_L dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI. \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$

Поле изменяется от $B_1 = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi R_1}I$ до $B_2 = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi R_2}I \quad \Rightarrow \quad B_{cp} = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi R_{cp}}I = \mu_0 nI,$

n – число витков на единицу длины средней линии тороида.

Закон полного тока в дифференциальной форме

$rot\vec{A}$– циркуляция вектора $\boldsymbol{A}$ по контуру L, который охватывает площадь $S \to 0$ и ориентирован таким образом, чтобы эта циркуляция была максимальной (*max*).

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}}{S} = \frac{d\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}}{dS} = rot_n\vec{A}$$

– проекция вектора $rot\ \vec{A}$ на положительную нормаль $\boldsymbol{n}$ к площадке dS, охватываемой контуром L (S стремится к точке).

lim – величина скалярная и зависит от ориентации контура L в поле вектора $\boldsymbol{A}$.

Направление $rot\ \vec{A}$ совпадает с направлением вектора $\vec{n}$, когда lim принимает максимальное значение.

Циркуляция вектора характеризует свойства силового поля, усредненные по поверхности, охватываемой контуром L.

Физический смысл $rot\vec{A}$- циркуляция вектора **A** через единичную площадку, ориентированную так, чтобы эта циркуляция была наибольшей.

$rot\vec{A}$ характеризует свойства поля в точке $S \to 0$.

$$rot\vec{A} \equiv \left[\nabla\vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\cdot\vec{k}.$$

Теорема Стокса: зная $rot\vec{A}$ в каждой точке некоторой поверхности S, можно вычислить циркуляцию этого вектора $\boldsymbol{A}$ по контуру L, ограничивающему S

$$\left.\begin{aligned} &\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l} = \int\limits_S rot\vec{A}d\vec{S}. \\ &\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\int\limits_S \vec{j}d\vec{S}. \end{aligned}\right\} \oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_S rot\vec{B}d\vec{S}.$$

Закон полного тока в интегральной форме: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\int\limits_S \vec{j}d\vec{S}.$

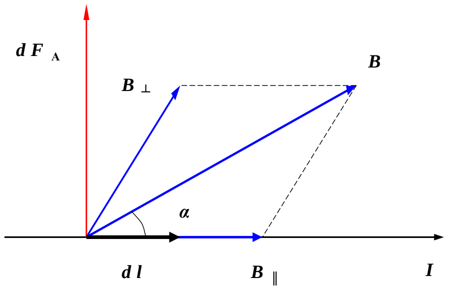
$$\int_S rot\vec{B}d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S}.$$

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}; \qquad rot\vec{H} = \vec{j}.$$

Действие магнитного поля на проводники и контур с током

Закон Ампера

$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$$

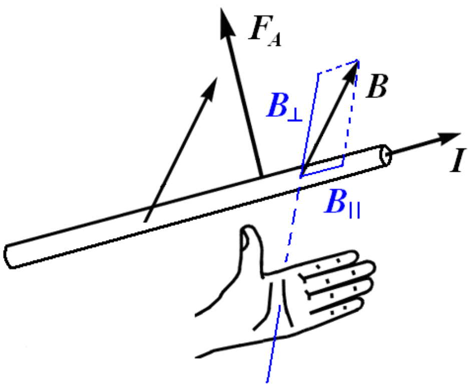


Элементарная сила **dF**, действующая на малый элемент длины *dl* проводника с током, находящийся в магнитном поле индукцией ***B***, прямо пропорциональна силе тока *I* в проводнике и векторному произведению $\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$.

Сила Ампера, действующая в магнитном поле на проводник с током конечной длины:

$$\vec{F}_A = \int_l I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right], \quad F_A = IBl\sin\alpha,$$

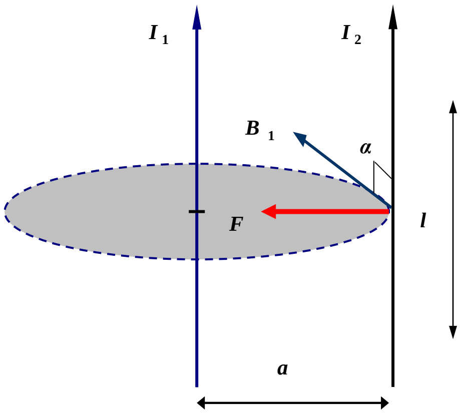
где α – угол между вектором ***B*** и вектором **dl**, направление которого совпадает с направлением тока *I*.



Направление силы Ампера определяется ***правилом левой руки***:

если ладонь левой руки расположить таким образом, что *B*⊥ входит в ладонь, четыре выпрямленных пальца направлены по току, то большой палец, отогнутый на 90^0, указывает направление F_A.

Взаимодействие параллельных токов.
Основная электрическая единица СИ –Ампер



Параллельные токи одного направления притягиваются.

Поле бесконечного проводника:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi a}2I_1. \\ \alpha &= 90^0, \\ F &= I_2 B_1 l \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} F &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1I_2}{a}\cdot l, \\ I_1 &= I_2 = I, \quad \mu = 1. \end{aligned}\right\}$$

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I^2}{a}l. \rightarrow$$

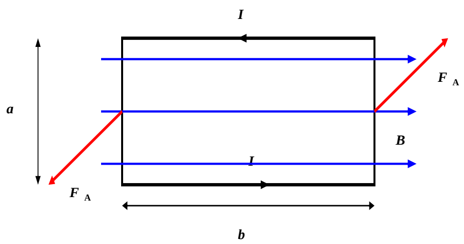
1 **Ампер** (А) – это сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум прямолинейным бесконечно длинным проводникам, находящихся в вакууме на расстоянии 1 метр друг от друга, сила их взаимодействия составляет $2\cdot10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

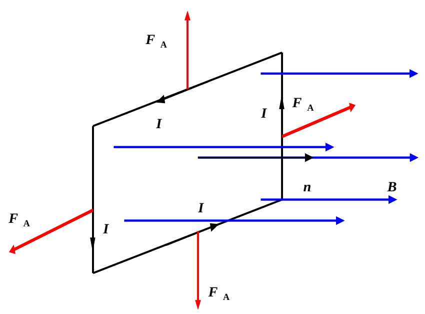
Этот опыт является фундаментальным и позволяет выделить силы взаимодействия проводников в «чистом» виде.

Кулоновские силы в этом случае равны нулю, так как незаряженный проводник с током электронейтрален $(\rho_- = \rho_+)$.

Действие магнитного поля на контур с током

● Прямолинейный контур в магнитном поле.





Вектор магнитной индукции ***B*** находится в плоскости контура.

$$F_A = IaB\sin\alpha,$$

$$\alpha = 90^0.$$

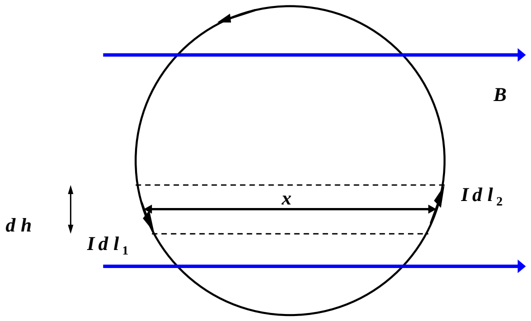
$$M = F_A\cdot b = IabB = ISB = p_m B.$$

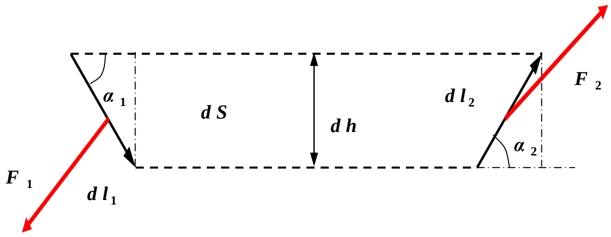
$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]$$

Контур поворачивается таким образом, что его положительная нормаль ***n*** совпадает с вектором ***B*** и останавливается в положении равновесия.

Равнодействующая всех сил, действующих на контур, равна нулю.

● Контур произвольной формы.



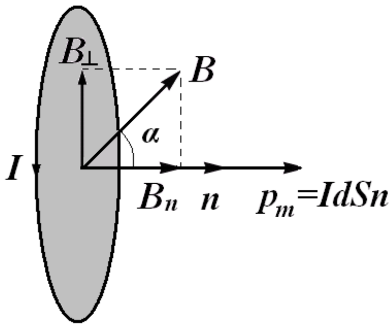


$$\left.\begin{aligned} d\vec{F}_1 &= I\left[d\vec{l}_1, \vec{B}\right], \qquad dF_1 = Idl_1 B\sin\alpha_1 = IBdh. \\ d\vec{F}_2 &= I\left[d\vec{l}_2, \vec{B}\right], \qquad dF_2 = Idl_2 B\sin\alpha_2 = IBdh. \end{aligned}\right\}$$

На элемент контура действует пара сил:

$$dM = dF \cdot x = IBdh \cdot x = IBdS, \qquad M = \int_S IBdS = p_m B, \qquad \vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$$

● Между нормалью ***n*** к контуру и вектором ***B*** угол α ($\angle \vec{B}, \vec{n} = \alpha$).



Вектор ***B*** разложим на два вектора

• B_n: $\quad \angle \vec{B}_n, \vec{n} = 0 \Rightarrow \qquad \vec{M}_n = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right] = 0.$

• $B_\perp$: $\quad B_\perp = B\sin\alpha, \qquad M_\perp = p_m B\sin\alpha.$

В общем виде $\qquad \vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$